Feuille d'Exercices : analyse combinatoire

Propriétés des coefficients du binôme

Exercice 1 : Au moyen de la formule du binôme de Newton, développer $(1+x)^n$. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 2 : Calculer $S = \displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\ impair}}\binom{n}{k}$, et $T = \displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\ pair}}\binom{n}{k}$.

Exercice 3 : Soient n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Démontrez la formule :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 4 : Démontrer en utilisant de préférence un raisonnement de dénombrement que :

1. Pour tous entiers naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$.
2. Pour tous entiers naturels n, p, k tels que $0 \leq k \leq \min\{n,p\}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}$.

Analyse combinatoire

Exercice 5 : Le Poker se joue avec un jeu de 32 cartes, on distribue à chaque joueur une "main" de cinq cartes.

1. Dénombrer le nombre de mains possibles.
2. Dénombrer le nombre de mains qui contiennent :
   (a) un carré d'as (4 as).
   (b) un carré (4 cartes de même hauteur).
   (c) un full (3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur).
   (d) un brelan (3 cartes de même hauteur sans full ni carré)
   (e) une quinte flush (5 cartes de hauteur consécutives et de même couleur).
   (f) une couleur (5 cartes de la même couleur sans quinte flush).
   (g) exactement deux rois et trois coeurs.

Exercice 6 : Au loto sportif, le parieur remplit une grille dans laquelle il indique ses prévisions pour treize matchs de football à venir. Pour chaque match, il peut cocher au choix trois cases : "1" pour une victoire de l'équipe 1, "2" pour une victoire de l'équipe 2, et "N" pour un match nul. A l'issue du match une et une seule de ces trois réponses sera réalisée.

1. De combien de façons un parieur peut-il remplir la grille ?
2. Dénombrer les grilles pour lesquelles à l'issue des matchs
   (a) toutes les réponses sont exactes.

(b) toutes les réponses sont fausses.
(c) exactement trois réponses sont exactes.

3. Pour gagner, il faut avoir coché au moins dix réponses exactes. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

***Exercice* 7 :** Le jeu d'échec se joue sur un échiquier de 8 lignes et 8 colonnes. Les tours peuvent prendre toute pièce située dans leur ligne ou leur colonne.

1. De combien de façons peut-on placer 8 tours identiques, de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres.
2. De combien de façons peut-on placer k tours identiques, $k \in \{1, \dots, 8\}$ de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit menacée par les autres ?

***Exercice* 8 :** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue k tirages successifs, sans remise, d'une boule et on note le numéro correspondant. On obtient ainsi une liste de k nombres.

1. Quel est le nombre de résultats possibles ?
2. Quel est le nombre de suites croissantes que l'on peut obtenir ?

***Exercice* 9 :** Le jeu du loto consiste à choisir un sous-ensemble de 6 nombres de $\{1, 2, \dots, 49\}$.

1. Déterminer le nombre de combinaisons possibles.
2. Déterminer le nombre de combinaisons comportant au moins deux nombres consécutifs.

Dénombrements

***Exercice* 10 :** Soit S_n l'ensemble des permutations de $\mathbb{F}_n$.

1. Soient k un entier non nul, et $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ une partie de $\mathbb{F}_n$ à k éléments. Combien y a-t-il de permutations laissant invariants les éléments de A ?
2. Combien y a-t-il de permutations ne laissant aucun élément de $\mathbb{F}_n$ invariant ?

***Exercice** 11 :** Soient E un ensemble de cardinal n, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties de E.

1. De combien de façons différentes peut-on choisir le couple (A, B) ?
2. Combien existe-t-il de couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$?
3. Combien existe-t-il de couples (A, B) tels que $A \cup B = E$?
4. Combien existe-t-il de couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$?

***Exercice** 12 :** Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons

$$S_1 = \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \mathsf{Card}\ X;\ S_2 = \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \mathsf{Card}\ (X \cap Y);\ S_3 = \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \mathsf{Card}\ (X \cup Y).$$

1. Montrez que $S_1 = n2^{n-1}$.
2. Montrez que $S_2 = n2^{2n-2}$.
3. Etablir la relation $S_2 + S_3 = 2^{n+1} S_1$. En déduire que $S_3 = 3n2^{2n-2}$.

***Exercice** 13 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Combien existe-t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$ tels que $x + y = n$?
2. Combien existe-t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$ tels que $x \neq y$?
3. Combien existe-t-il de couples $(x, y) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$ tels que $x > y$?

Exercices supplémentaires

Analyse combinatoire

Exercice* 14 *: Déterminez le terme maximum dans le développement de $(2+3)^{50}$ par la formule du binôme.

Exercice* 15 *: Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $0 \leq p \leq k \leq n$. Démontrez que

$$\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}.$$

En déduire

$$S_1 = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}; \quad \text{et } S_2 = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{p}.$$

Exercice* 16 *: Démontrez en utilisant la formule du binôme de Newton que pour tous entiers naturels n, p, k tels que $0 \leq k \leq \min\{n, p\}$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{p}{k-i} = \binom{n+p}{k}.$$

Dénombrements

Exercice* 17 *: Lors de la finale du 100m des mondiaux d'athlétismes huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont américains. Les trois premiers arrivés montent sur le podium dans leur ordre d'arrivée.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de podiums cent pour cent américains ?
3. Combien y a-t-il de podiums comprenant au moins un américain ?
4. Combien y a-t-il de podiums comprenant exactement deux américains ?

Exercice* 18 *: Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que

$$x + y + z = p \qquad \text{(où p est un entier naturel donné)}$$

Indication : on interprétera le problème posé en termes de p-combinaisons d'un ensemble à trois éléments.

Exercice* 19 *: A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie d'un nombre de quatre chiffres. Par exemple A 1998.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes
   (a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (c) pour lesquels les quatres chiffres sont différents ?
   (d) pour lesquels les quatres chiffres sont dans l'ordre croissant ?

Exercice 20 : Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle ne peut progresser que par bonds de une ou deux marches. De combien de façons différentes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?

Attention ! on veut que la grenouille arrive "pile" sur la treizième marche

on remarquera qu'une progression de la grenouille est une suite de 1 *et de* 2 *dont la somme vaut* 13