Exercices : nombres réels et fonctions numériques

Propriétés des nombres réels

***Exercice* 1 :** Démontrez que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z| \text{ et } |x - y| + |x + y| \geq |x| + |y|$$

***Exercice** 2 :** Démontrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, $\quad \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
Indication : on pourra discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.

***Exercice** 3 :** Soient $\alpha = 20 + 14\sqrt{2}$ et $\beta = 20 - 14\sqrt{2}$

1. Montrez que α et β sont irrationnels.
2. Calculez $\sqrt[3]{\alpha\,\beta}$
3. Montrez que $a = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ est **rationnel** !
   Indication : on pourra montrer que a est solution d'une équation polynômiale de degré 3.

***Exercice* 4 :** Déterminer les bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants :

$$A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^\star\}; \quad B = \{(-1)^n\ (1 - \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N}^\star\}; \quad C = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m};\ (n, m) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star\}$$

Fonctions numériques

***Exercice* 5 :**

1. Démontrez qu'il existe un unique couple de réels (a, b) tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad \frac{1-x}{1+x} = a + \frac{b}{1+x}.$$
2. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall t \in [0, 1[, \quad f(t) = \ln \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}}$.
   (a) Modifiez l'expression de f en utilisant la première question,
   (b) En déduire que f réalise une bijection de $[0, 1[$ sur son ensemble *image* et donner l'expression de son application réciproque.

***Exercice* 6 :** Précisez l'ensemble de définition et dressez les tableaux de variations des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(\vec{e}^{x} - 1); \qquad g(x) = \exp\left(\frac{1}{1-x}\right); \qquad h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

NB : aucun calcul de dérivée n'est indispensable.

***Exercice* 7 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $6\vec{e}^{5x+2} - 7\sqrt{\vec{e}^{8x+4}} + \vec{e}^{3x+2} = 0$.
2. $(x\sqrt{2} - \sqrt{3})^6 = \left(x\sqrt{3} + \frac{7}{4}\right)^3$.
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
4. $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

***Exercice* 8 :** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{ \begin{array}{rcl} \ln(-x + 2y) & = & \ln(2x - 3y + 4) \\ 3^{5x+y} \times 3^{-x-6y} & = & 81 \end{array} \right.$

***Exercice* 9 :** Simplifiez pour tout nombre réel x les expressions suivantes :

$$\sin 2x + (\sin x - \cos x)^2; \qquad \cos^2 x + \cos^2(2\pi/3 + x) + \cos^2(2\pi/3 - x); \qquad \sin^2 x + \sin^2(2\pi/3 + x) + \sin^2(2\pi/3 - x)$$

Exercices supplémentaires

Propriétés des nombres réels

***Exercice* 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère une famille $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de réels tels que

$$0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$$

Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$, $i \neq j$, tels que $|x_i - x_j| \leq 1/n$.

***Exercice* 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, démontrez que :

1. $\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
2. $\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n, \forall j \in [\![1, n]\!], \quad |\sum_{i=0}^{n} x_i| \geq |x_j| - \sum_{i\neq j} |x_i|$.

***Exercice* 12 :** Soient a, b, c des nombes réels.

1. (a) Montrez que
$$a + b < 2 + a^2 + b^2 \text{ et } a + b < (1 + a^2)(1 + b^2)$$
   (b) Comparez alors $2 + a^2 + b^2$ et $(1 + a^2)(1 + b^2)$.
2. Prouvez que
$$8abc \leq (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$
3. Prouvez que
$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

***Exercice* 13 :** Démontrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

En déduire pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls, une expression simplifiée de la somme

$$\sum_{k=0}^{p} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

***Exercice* 14 :** Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

On pourra commencer par examiner le cas simple où $n = 2$.

***Exercice* 15 :** Démontrez que $a = \sqrt{2}\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{2}\sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$ est rationnel.

***Exercice* 16 :** Pour tout nombre réel $x \geq 1$, simplifiez $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

***Exercice* 17 :** On considère l'application f de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout entier naturel non nul n associe le réel $f(n) = \dfrac{n - 1/n}{1 + 1/n}$.

1. Montrez que l'image directe de f est majorée et minorée.
2. Déterminez la borne supérieure et la borne inférieure de f sur $\mathbb{N}^\star$.
3. Etudiez l'existence d'un maximum et d'un minimum pour f.
4. Prouvez que f est injective et en déduire que $f(\mathbb{N}^\star)$ possède une infinité d'éléments.

***Exercice* 18 :** Soient A et B des parties bornées de $\mathbb{R}$. Démontrez que :

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B \text{ et } \inf A \geq \inf B.$$

Equations & systémes d'équations

***Exercice* 19 :** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{\begin{array}{rcl} \ln x^2y^3 & = & -4 \\ \ln\left(x^3/y^4\right) & = & 11 \end{array}\right.$

***Exercice* 20 :** Factorisez dans $\mathbb{R}$ les polynômes :

1. $A(x) = x^4 + 3x^2 + 2$
2. $B(x) = x^4 + x^2 + 1$
3. $C(x) = x^3 + x - 3$
4. $D(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3.$

***Exercice* 21 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\quad 5^{\sin x} + \dfrac{2}{5^{\sin x}} = 3$

***Exercice* 22 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\quad (1 - \sqrt[3]{x})^3 + 125 \times (3 - \sqrt[3]{x})^3 = 0$

***Exercice* 23 :** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x\sqrt{3} - y\sqrt{2})^2 & = & (2\sqrt{3}\ x + 3\sqrt{2}\ y)^2 \\ x^3 & = & (y-1)^3 \end{array}\right.$$

***Exercice* 24 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 + 2\ln x \leq 0.$

***Exercice** 25 :** Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les solutions de l'équation :

$$e^{2x} - 4me^x + 2(m+1) = 0$$

Fonctions numériques

***Exercice* 26 :** On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \max\{\frac{x+10}{5};\ x-3\} \end{array}.$$

f est-elle bijective ? Si oui, précisez son application réciproque.

***Exercice* 27 :** Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$.

1. Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
2. Montrez que f induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle à préciser.
3. Déterminer l'application réciproque de f.

***Exercice* 28 :** Etudiez le signe des expressions suivantes en discutant suivant la valeur de x :

1. $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$
2. $g(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{|2x-3|}$
3. $h(x) = \sqrt{|x^2-1|} - \sqrt{|2x^2+x-3|}$

Trigonométrie

***Exercice* 29 :**

1. Trouver une relation simple entre $\cos x - \sin x$ et $\sin 2x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\sin 2x - (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\cos x - \sin x) = 2 + \sqrt{3}$$

Exercice* 30 *: Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les inéquations

$$\begin{aligned} 4\cos^2 x - 2(\sqrt{2}-1)\cos x - \sqrt{2} &> 0 \\ 4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} &\leq 0. \end{aligned}$$

Exercice* 31 *: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi.\mathbb{Z}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kx$.

1. Montrez la formule de *linéarisation* :

$$2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

2. Calculez $2\sin(x/2) \times S_n$
3. En déduire une expression simple de S_n.
4. En vous inspirant de la méthode ci-dessus, déterminez une expression simplifiée de $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

Exercice* **32 :** Inégalité de Cauchy-Schwarz
Le but de l'exo est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tous réels $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

1. Démontrez l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$.
2. On suppose désormais que $\sum_{i=1}^{n} x_i^{>}_{i} 0$. On considère $T(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$.
   (a) Démontrez que T est un polynôme de degré 2 en λ.
   (b) Démontrez que le discriminant de T est négatif ou nul.
   (c) Développer $T(\lambda)$ et conclure.

Exercice **33 :** Résoudre $\mathbb{R}^2$ le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ln(-x+2y) & = & \ln(2x-3y+4) \\ 3^{5x+y} \times 3^{-x-6y} & = & 81 \end{array} \right.$$