Exercices : nombres complexes

Notations algébrique et exponentielle

***Exercice* 1 :** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

***Exercice* 2 :** Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{3}{1-i}, \quad z_2 = \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^2}, \quad z_3 = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}.$$

***Exercice* 3 :** Soient θ, θ' deux nombres réels.

1. Transformez $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$ où ρ et θ sont des réels.
2. En déduire la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1 + e^{i\pi/3}$, $z_2 = e^{4i\pi/3} - 1$

***Exercice* 4 :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifiez les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n, \quad z_2 = \Big((\sqrt{3}-1) + i(1+\sqrt{3})\Big)^n + \Big((\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})\Big)^n.$$

***Exercice* 5 :** Démontrez que pour tous u et v dans $\mathbb{C}$,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\ (|u| + |v|).$$

Racines $n^{\text{ièmes}}$ & Equations polynomiales

***Exercice* 6 :** Déterminez les racines carrées de $9+40i$ et les racines quatrièmes de $-7-24i$.

***Exercice* 7 :**

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes
$$u = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}, \quad v = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^6 = u$ et $z^4 = v$.

***Exercice* 8 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^5 = 1$.
2. $z^7 = 1 + i\sqrt{3}$.
3. $z^6 - (1+2i)z^3 + 3(1+i) = 0$.
4. $z^6 \bar{z} = 1$.

***Exercice* 9 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\quad z^2 - (2+3i)z + 3i - 1 = 0.$

***Exercice* 10 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^n = 1.$

Applications à la trigonométrie

***Exercice* 11 :**

1. Présentez sous forme trigonométrique les nombres complexes $u = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ et $v = 1 - i$.
2. En déduire une présentation trigonométrique de u/v, puis les valeurs exactes de $\cos\pi/12$ et $\sin\pi/12$.

***Exercice** 12 :** Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$, et $\cos^5 x \sin x$.

***Exercice** 13 :** Soient $a, b, r \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculez :

Exercices supplémentaires

Notations algébrique et exponentielle

***Exercice* 14 :** Soit z un nombre complexe de module 1, montrez que $\dfrac{i\bar{z}-1}{z-i}=-\bar{z}$.

***Exercice* 15 :** Soient a et b des nombres réels.Résoudre dans $\mathbb{C}$ le sytème $\left\{\begin{array}{rcl} z+|z| & = & a+ib \\ z-|z| & = & a-ib \end{array}\right.$

***Exercice* 16 :** Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z=(1+i\tan\varphi)^2$, où $\varphi\in[0,\pi/2[$.
2. $z=\dfrac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}$, où $\varphi\in]0,2\pi[$.
3. $z=\dfrac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin 2\varphi}+i\sqrt{1-\sin 2\varphi}}$, où $\varphi\in[0,\pi/2[$.

***Exercice* 17 :** Déterminez l'ensemble des entiers naurels $n\in\mathbb{N}$ pour lesquels $(1+i)^n\in\mathbb{R}$.

***Exercice* 18 :** Déterminez l'écriture trigonométrique de

$$\frac{e^{i\pi/6}-i}{e^{i\pi/3}+1},\quad e^{i\theta}+e^{2i\theta},\quad \left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{43},\quad \frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}.$$

***Exercice* 19 :** Démontrez que $\quad (\forall (z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\star),\ \big(|z+z'|=|z|+|z'| \iff \exists\lambda\in\mathbb{R}^+\ ;\ z=\lambda z'\big)$.

Racines $n^{\text{ièmes}}$

***Exercice* 20 :** Déterminez les racines carrées de $22+i8\sqrt{3}$.

***Exercice* 21 :** Déterminez les racines quatrièmes de $28+96i$.

***Exercice* 22 :** Soit $n\geq 2$. On pose $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Démontrez que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k=(-1)^n$.

***Exercice* 23 :** Soit $n\in\mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2 et ω une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 différente de 1 lui-même. Calculez les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+\omega^k)^n$.

Equations

***Exercice* 24 :** Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n=(z+1)^n$.
On donnera la réponse sous forme exponentielle ou trigonométrique.

***Exercice* 25 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^{2n}-2z^n\cos(na)+1=0$$

Exercice 26 : Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$$

Exercice 27 : Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^2(1 - z^2) = 16$$

Exercice 28 : Résoudre dans $\mathbb{C}$
$$z^4 - i\sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}(i-1)z - 8 - 8i = 0$$

Indication : on vérifiera que cette équation possède une solution imaginaire pure

Applications à la trigonométrie

Exercice* 29 : Linéariser $\sin^4 x$, $\cos^3 x \sin^4 x$ et $\cos^4 x$.

Exercice* 30 : Démontrez que pour tous nombres réels p et q,

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$
2. $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \times \sin\frac{p-q}{2}$
3. $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \times \cos\frac{p-q}{2}$
4. $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2} \times \cos\frac{p+q}{2}$

Exercice 31 : Linéariser $\sin^4 x$ et $\cos^4 x$.

Exercice 32 : Linéariser $\cos^2 x \sin^2 x$, $\cos^3 x \sin^4 x$ et $\cos^5 x \sin x$.

Exercice 33 : On considère le nombre complexe $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

1. Déterminez en procédant de deux manières différentes les racines carrées de z
   on pourra remarquer que $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$
2. Retrouver ainsi les valeurs exactes de $\cos\pi/12$ et $\sin\pi/12$.

Exercice 34 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$

1. Démontrez que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$,
$$\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k) = \sum_{l=0}^{n-1} z^l$$
2. En déduire que
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 35 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul et $\theta \in]0, \pi[$. Calculez
$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\sin k\theta$$

Exercice** 36 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimez $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.