Exercices : polynômes à une indéterminée

Opérations

***Exercice* 1 :** Déterminez les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $P_1 = X^3 - X \times (X - 2 + i)^2$
2. $P_3 = \prod_{k=0}^{n} (2X - k)$
3. $P_2 = (X - 2)^n - (X + 5)^n$
4. $P_4 = \prod_{k=0}^{n} (X - 6)^k$

***Exercice* 2 :** Déterminez l'ensemble des polynômes P tels que $P(X^2) = (X^2 + 1) \times P(X)$.
Indication : procédez par Analyse-synthèse. Vous chercherez une condition nécessaire portant sur le degré d'un tel polynôme.

***Exercice* 3 :** Simplifiez le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} \, X^k$

Divisions euclidiennes

***Exercice* 4 :** Effectuez les divisions euclidiennes de A par B lorsque :
1. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$, 2. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$

***Exercice* 5 :** Déterminez les restes dans la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$
2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X - i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 2)^2$
4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X - 3)^3$

***Exercice* 6 :** Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminez le reste et le quotient de A par B, lorsque
$A = X^n + X^{n-1} + X + 1$ et $B = (X - 1)^2$; $A = (X - 1)^n + (X + 2)^n + 2$ et $B = (X - 1)^n$.

Divisibilité et racines multiples

***Exercice* 7 :** Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α du polynôme P lorsque :

1. $\alpha = 2$ et $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$
2. $\alpha = 1$ et $P = X^{n+1} - (n + 1)X + n$

***Exercice* 8 :** Pour un entier n supérieur ou égal à 2, on considère les polynômes $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$ et $Q = X^{2n+1} - (2n + 1)X^{n+1} + (2n + 1)X^n - 1$. Prouvez que 1 est racine triple de chacune de ces polynômes.

***Exercice* 9 :**
1. Factorisez dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $Q = (X^2 + X + 1)$.
2. Soient m, n, p trois entiers naturels. Démontrez que Q divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $X^{3n} + X^2 + 1$ est-il divisible par Q ?

Factorisations

***Exercice* 10 :** Déterminez les racines du polynôme $X^8 - 1$. En déduire la factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

***Exercice* 11 :** Décomposez en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^6 + 1$,
2. $P_2 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$,
3. $P_3 = (1 - X^2)^3 + 8X^3$
4. $P_4 = X^8 - 2X^4 \cos 2\alpha + 1$

***Exercice** 12 :** Soit $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^4 + 8X^2 - 5X + 1 \in \mathbb{C}[X]$

1. Vérifiez que 1 et -1 sont racines de P. Précisez les multiplicités respectives α et β de 1 et -1.
2. En déduire une première factorisation :

$$P = (X-1)^{\alpha} \times (X+1)^{\beta} \times P_1$$

   où P_1 est un polynôme vérifiant $P_1(1) \neq 0$ et $P_1(-1) \neq 0$ que vous déterminerez.
3. Vérifiez que $\forall z \in \mathbb{C}^{\star}$ $\tilde{P}_1(z) = 0$ *si et seulement si* $Z = z + \dfrac{1}{z}$ est racine d'une équation de degré 2 à préciser.
4. En déduire la factorisation de P en produits d'irréductibles.

Exercices supplémentaires

Propriétés élémentaires

Exercice* 13 *: Soient P, Q, R trois polynômes à coefficients réels liés par la relation :

$$P^2 - XQ^2 = XR^2$$

Démontrez que ces trois polynômes sont nuls.

Exercice* 14 *: Soient P, Q, R trois polynômes à coefficients réels liés par la relation :

$$(X^3+1)P^2 - XQ^2 = X^3R^2 - 2X^2RQ$$

Déterminez ces trois polynômes.

Divisions et racines

Exercice* 15 *: Effectuez la division euclidienne de $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ par $B = X^2 - 5X + 4$.

Exercice* 16 *: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$
Déterminez le reste de la division euclidienne de $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ par B lorsque
- $B = (X-1)(X-2)$
- $B = (X-1)^2$
- $B = (X-1)^2(X-2)$

Exercice* 17 *: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Effectuez- sans la poser !- la division euclidienne de $A = (X-1)^{n+2} + (X+2)^{n+1} - 1$ par $B = (X-1)^n$.

Exercice* 18 *: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul. Effectuez- sans la poser !- la division euclidienne de $A = (X+1)^{n+1} + (X-1)^n - 1$ par $B = (X+1)^3$.

Exercice* 19 *: Soit $n \geq 2$. On considère les polynômes $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-1)^2$.

1. Déterminez le reste R dans la division euclidienne de A par B.
2. En utilisant la *formule de Taylor*, déterminez le quotient de la division euclidienne de A par B.

Exercice* 20 *: Soit $n \in \mathbb{N}^\star$
Déterminez le reste de la division euclidienne de $A = X^n$ par B lorsque
- $B = X + 3$
- $B = X^2 - 6X - 16$
- $B = (X-2)^2$

Exercice* 21 *: Déterminez un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ sachant
- le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$ est 3
- le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est 3
- le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$ est 3.

Exercice* 22 *: On considère les polynômes $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + X$ et $B = (X-1)^2$.
Déterminez le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B.

Exercice* 23 *: Pour quelles valeurs de n le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice* 24 *: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On définit le polynôme

$$Q = \frac{1}{3}\left(P(X) + P(jX) + P(j^2X)\right)$$

Démontrez que $Q \in \mathbb{C}[X^3]$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = R(X^3)$.

Factorisations

Exercice* 25 *: Factoriser $P = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

***Exercice* 26 :** Soit $P = X^8 + X^4 + 1$

1. Donner la décomposition de P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Donner la décomposition de P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

***Exercice* 27 :** Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $Q = X^n - a$, $R = X^n + a$, où $a \in \mathbb{R}^+$ est un nombre réel positif.

***Exercice* 28 :** Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P_1 = 1+X^2$, $P_2 = 1+X+X^2$, $P_3 = 1+X^3$.

***Exercice* 29 :** Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = 6X^4 + X^3 + (6i + 10)X^2 + (2 + i)X - (4 + 2i)$$

sachant qu'il possède des racines réelles.