Feuille d'Exercices : Suites N°1

***Exercice* 1 :** Soit u une suite de nombres entiers relatifs qui converge vers un réel ℓ. Montrez que u est stationnaire.

***Exercice* 2 :** Etudiez la monotonie des suites

1. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$
2. $u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$
3. $u_n = \frac{\ln n}{n}$, pour $n \geq 1$
4. $u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

***Exercice* 3 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite bornée de nombres réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \qquad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

1. Montrez que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ converge.
2. Montrez que (v_n) est convergente de limite nulle.

***Exercice* 4 :** On considère la suite S définie par $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n+2k-1}$.

1. Etudiez la monotonie de S.
2. Montrez que S est convergente
3. Déterminez un encadrement de la limite.

***Exercice* 5 :** Suite récurrente Soit u la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3-u_n} \end{cases}$$

Dans cet exercice nous présentons une méthode -ce n'est pas la seule !- pour démontrer que u converge.

1. Démontrez que u est majorée par 0.
2. Etudiez la monotonie de u.
3. Conclure à la convergence de u.
4. Déterminez sa limite.

***Exercice* 6 :** Comparaisons
Etudiez la convergence des suites définies par :

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \qquad v_n = \left(1 + \frac{\sin n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

***Exercice** 7 :** Suite définie implicitement
On considère pour $n \in \mathbb{N}^\star$ la fonction polynomiale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$$

1. En étudiant la fonction polynomiale p_n, démontrez qu'elle possède une unique racine positive notée u_n.

2. Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $p_n(u_{n+1}) < 0$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et démontrez qu'elle converge.
3. Simplifiez l'expression de $p_n(x)$ pour $x \neq 1$ et en déduisez-en la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 : Soit u une suite décroissante, convergente de limite nulle. On étudie la suite S définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, u_k$$

1. Montrez que les suites (S_{2k}) et (S_{2k+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite S converge et que sa lmite ℓ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \ell| \leq u_{n+1}$$

Exercice 9 : Soit $0 < b < a$. On considère les suites *imbriquées* définies par

$$\left\{ \begin{array}{lll} & u_0 = a & v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & v_{n+1} = \dfrac{2u_n \, v_n}{u_n + v_n} \end{array} \right. .$$

1. Démontrez par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < u_n$.
2. Démontrez que v est croissante et que u est décroissante.
3. (a) Vérifiez que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$
   (b) En déduire que les suites u et v sont adjacentes.
4. Déterminez la limite commune des suites u et v.