Feuille d'Exercices : Calcul de limites

Limites de fonctions

Exercice 1 : Calculez lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$$

Exercice 2 : Ranger par ordre de négligeabilité en $+\infty$ les fonctions :

$$f_1 : x \to x^2\ ;\ f_2 : x \to e^x\ ;\ f_3 : x \to 5^x\ ;\ f_4 : x \to \ln x\ ;\ f_5 : x \to x^{10}\ ;\ f_6 : x \to (\ln x)^{10}.$$

Exercice 3 :

1. Montrez que $\ln\ln x = o_{+\infty}\big(\ln x\big)$.
2. En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$

Exercice 4 : Déterminez un équivalent au point considéré des fonctions suivantes :

1. $x \to \ln\cos x$ en 0
2. $x \to \ln(1+\sin x)$ en 0
3. $x \to e^{-x}+\sin x$ en 0
4. $x \to \dfrac{\sqrt{1+\tan^2 x}-1}{\tan x}$
5. $x \to \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ en 0
6. $x \to \left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-x+1}\right)^x$ en $+\infty$
7. $x \to x\big(e^{1/x}-\cos(1/x)\big)$ en $+\infty$
8. $x \to \ln(1+1/x)$ en $+\infty$

Exercice * ***5 :***

1. Calculez les limites en 0 de
$$(1+x)^{1/x}, \quad (1+x^2)^{1/x}, \quad (1+x)^{1/x^2}$$
2. Soient $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ deux fonctions, $a \in \bar{I}$. Démontrez que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_{x\to a}(f-g)(x) = 0$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ deux fonctions, $a \in \bar{I}$. On suppose de plus $f > 0$ au voisinage de a et $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Montrez que $f \sim_a g \Rightarrow \ln f \sim_a \ln g$.
4. Déterminez un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\ln(e^x-1)$.

Exercice 6 :

1. Déterminez un équivalent simple de $x^{1/x}-1$ au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de $x^{x^{1/x}}-x$.
Indication : factorisez par x.

Exercice 7 : Calculez lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{\cos \pi x/2}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$
5. $\lim_{x\to\pi/2} (1-\sin x)\tan^2 x$
6. $\lim_{x\to\pi/3} \dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\pi/3}$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x(e^x-1)}{\sin^3 x}$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1+x^2+\sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$
9. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\ \ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$
10. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(\ln x)\big)^2-\cos^5 x+\ln x}{2^x-50x^6}$
11. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\big(\ln(\ln x)\big)-(1/2)^x}{(1/x)^3-(1/3)^x}$
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\big(e^x-1\big)\ln(x+1)}{\sqrt{1+x^2}-1}$

***Exercice* 8 :** Déterminez un équivalent de la suite u définie ci-dessous et en déduire son comportement asymptotique :

1. $u_n = \dfrac{\sin 1/n}{e^{1/n} - 1}$
2. $u_n = \dfrac{n - \ln n + 4/n}{e^n - n^2}$
3. $u_n = \dfrac{\sin n + n}{3^n + (-1)^n - n}$
4. $u_n = \dfrac{(1 - \cos 1/n)\ \cos 1/n}{e^{1/n^2} - 1}$
5. $u_n = (1/2)\, n^2 \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)\right)$
6. $u_n = \left(\dfrac{2n^5}{5n + 3n^5}\right)^n$
7. $u_n = \left(\dfrac{n^2 + 2n + 8}{n^2 - 3n + 7}\right)^n$
8. $u_n = \sqrt{2n^2 + 3n} - \sqrt{5n^2 - 1}$
9. $u_n = \sqrt{2n + n^5 + \dfrac{5}{n}} - \sqrt{n^2 - \dfrac{2}{3n^3}}$
10. $u_n = n\,\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$

***Exercice* 9 :** Soit u une suite décroissante de limite 0 telle que $u_{n+1} + u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$. On souhaite démontrer qu'en ce cas $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

1. Posons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n\ (u_n + u_{n+1})$.
   (a) Montrez que a est convergente et déterminiez sa la limite.
   (b) Montrez que que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\quad a_n \leq 2n\, u_n \leq \dfrac{n}{n-1} a_{n-1}$.
   En déduire que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.
2. Démontrez que le résultat n'est plus vrai si la suite u n'est plus supposée décroissante.
   Indication : on pourra considérer la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercices supplémentaires

Limites de fonctions

Exercice 10 : Donnez un équivalent simple au voisinage du point considéré, des fonctions suivantes :

Au voisinage de 0

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \sin x \cos x \ln(1+x)$
3. $f(x) = x\sqrt{x+1} - x$
4. $f(x) = \sin x^2$
5. $f(x) = \ln(1+3x)$

Au voisinage de $+\infty$

6. $f(x) = x^2 + x + 1$
7. $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$
8. $f(x) = \ln x + x$
9. $f(x) = \ln x + \cos x$
10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4x-2}$

Au voisinage de 0 et $+\infty$

11. $f(x) = x + \sqrt{x}$
12. $f(x) = e^x + \sin x$
13. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
14. $f(x) = \dfrac{xe^x - x}{\ln(1+x)}$
15. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{4x^2}$

Exercice 11 : Calculez, lorsqu'elles existent les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \tan x \left(1 - \tan\frac{x}{2}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{-2} - \sin x\,(1/3)^x}{x^3 - \sqrt[4]{x}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos x\,(\ln x)^{-2} - (1/3)^x}{x^3 - \sqrt[4]{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(\ln x)\big)^2 - \cos x^5 + \ln x}{2^x - 50x^6}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+1)\sin\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \quad a, b > 1$
8. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{\cos x - 1} - 1}{x^2}$

Limites de suites

Exercice 12 : Déterminez un équivalent de la suite u définie ci-dessous et en déduire son comportement asymptotique :

1. $u_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n} + n$
2. $u_n = e^{1/n} - 1 + \sin\dfrac{1}{n}$
3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où $a, b > 0$
4. $u_n = \sqrt{n}\ \sin\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$
5. $u_n = (\sqrt{n}+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
6. $u_n = a^n\big(\ln(n+1) - \ln n\big)$ où $a > 0$
7. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$
9. $u_n = n^2\ \ln(\cos\dfrac{1}{n})$
10. $u_n = \dfrac{1 - \cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{2}{n}} - 3e^{\frac{1}{n}} + 2}$

Lemme.— Si (u_n) est une suite de réels et ℓ un réel.

$$\textbf{Si} \lim_{n\to\infty} \big(u_{n+1} - u_n\big) = \ell, \quad \textbf{alors} \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \ell$$

Exercice 13 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n)$$

1. Montrez que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrez que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{1-u_n}$.
3. En déduire la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

4. Utilisez le **Lemme** précédent pour en déduire un équivalent de u_n.

***Exercice* 14 :** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel

$$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

1. Montrez que la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$.
2. Montrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{u_{n+1}} - e^{-u_n} = e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right)$$

3. Utilisez les équivalents usuels pour en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{u_{n+1}} - e^{-u_n}\right) = 1$$

4. Utilisez le **Lemme** ci-dessus pour en déduire un équivalent de e^{u_n}, puis un équivalent de u_n.

***Exercice* 15 :** Etudiez les suites définies par les relations de récurrences suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1+u_n)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
4. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$.
5. $u_0 \neq -1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
6. $u_0 \neq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1+u_n^2}{-1+u_n}$.
7. $0 \leq u_0 \leq 12$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.
8. $u_0 \geq -35/2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.